DOI:10.11776/j.issn.1000-4939.2025.01.008

三维二十面体准晶圆弧形界面刚性线的平面弹性问题

翟婷[1],马园园[1],赵雪芬[2]

(1. 宁夏大学数学统计学院,750021 银川;2. 宁夏大学新华学院,750021 银川)

摘 要: 作为颗粒材料去强化基体材料是准晶的重要应用之一,因此研究基体和夹杂(微小颗粒材料可看成是夹杂)界面刚性线问题具有重要的理论和现实意义。基于复变函数方法,研究了平面集中力和无限远处均匀拉伸应力作用下,含界面刚性线的圆形准晶夹杂的三维二十面体准晶平面弹性问题,得到应力分量和位移分量的封闭解,给出了刚性线夹杂尖端奇异应力场的解析表达式。数值计算讨论了耦合系数、夹杂半径和相位子场弹性常数对应力奇异因子的影响。结果表明:在平面载荷作用下,圆弧形刚性线尖端的应力场具有奇异性;夹杂半径对应力奇异因子的影响大于耦合系数以及相位子场参数对应力奇异因子的影响。

关键词: 准晶;圆形夹杂;刚性线;复变函数方法;应力奇异因子

中图分类号: O753.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-4939(2025)01-0081-10

The plane elasticity problem of circular arc interface rigid lines in three-dimensional icosahedral quasicrystals

ZHAI Ting[1], MA Yuanyuan[1], ZHAO Xuefen[2]

(1. School of Mathematical Statistics, Ningxia University, 750021 Yinchuan, China;
2. Xinhua College, Ningxia University, 750021 Yinchuan, China)

Abstract: It is one of the important applications of quasicrystals to strengthen matrix materials as granular materials. Therefore, it is of great theoretical and practical significance to study the interface rigid line between matrix and inclusions (micro granular materials can be regarded as inclusions). Based on the method of complex function, the plane elasticity problem of three-dimensional icosahedral quasicrystals with circular rigid line inclusions under the action of plane concentrated force and infinite uniform tensile stress is studied. The closed solutions of stress and displacement components in several typical cases are obtained, and the analytical expressions of singular stress field at the tip of rigid line inclusion are given. The effects of the radius of inclusion and coupling coefficient on the stress singularity factor are discussed numerically. The results show that the stress field at the tip of the circular rigid line inclusion has singularity under

收稿日期:2022-11-16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12062021);宁夏高等学校科学研究资助项目(No. NGY2020101);宁夏大学新华学院科学研究资助项目(No. 20XHKY03)
通信作者:赵雪芬,副教授。E-mail:snownfen@163.com
引用格式:翟婷,马园园,赵雪芬. 三维二十面体准晶圆弧形界面刚性线的平面弹性问题[J]. 应用力学学报,2025,42(1):81-90.
ZHAI Ting, MA Yuanyuan, ZHAO Xuefen. The plane elasticity problem of circular arc interface rigid lines in three-dimensional icosahedral quasicrystals[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2025, 42(1):81-90.

the plane load, and the influence of the radius of the inclusion on the stress singularity factor is greater than that of the coupling coefficient and phase field elastic constant.

Key words: quasicrystal; circular inclusion; rigid line; complex function method; stress singularity factor

准晶是1984年发现的一种新型结构和固体材料。由于独特的结构，使得准晶材料具有一些新的物理性质与化学性质特征，如耐磨、低密度、高硬度、抗氧耐腐、耐高温等[1-3]。准晶材料在室温呈脆性[4-6]，而脆性材料对缺陷非常敏感。孟祥敏等[7]的实验揭示了准晶体在外载荷、热载荷和一定内部效应作用下是可变形的，这使得它对裂纹、夹杂等缺陷非常敏感。因此，研究准晶材料的界面缺陷问题有重要的理论意义和实际应用价值。

作为颗粒材料去强化基体材料是准晶的重要应用之一，基于此，研究准晶材料的夹杂问题显得尤为重要。利用广义复变函数法，WANG 等[8]讨论了一维正方准晶中裂纹和刚性线夹杂问题。基于超奇异积分方程，LOU 等[9]讨论了无限一维六方准晶体中嵌入薄弹性夹杂的模型，用数值方法给出了应力强度因子的解。通过构造新的保角映射，GUO 等[10]分析了无限大一维六方压电准晶基体中内嵌椭圆夹杂的问题。HU 等[5]研究了一维压电准晶材料中的部分脱黏圆形夹杂模型，得到了声子场、相位子场的应力强度因子及电场的电位移强度因子。ZHANG 等[11]研究了3种不同外载荷作用下的含球状夹杂一维六方压电准晶体的弹性问题。WANG[12]基于解析延拓和保角变换研究了含任意形状夹杂二维十次对称准晶的 Eshelby 问题。马园园等[13]研究了点热源作用下十二次二维对称准晶基体和圆形准晶夹杂界面之间含多个裂纹的问题。WANG 等[14]求得了热流作用下含椭圆夹杂的二维十次准晶的温度场、声子场和相位子场的场变量解析解。

与一维和二维准晶相比，三维准晶本身的耦合特性，物理和几何性质更加复杂，这就使得三维准晶夹杂问题的求解更加困难。张亮亮[15]基于 Stroh 理论，研究了三维立方准晶含椭圆夹杂的问题。WANG 等[16]研究了三维二十面体准晶中球形夹杂中问题，获得了声子场和相位子场的一阶近似解析表达式。界面刚性线是一种硬质夹杂，在刚性线尖端会发生严重的应力集中现象，造成材料破坏。查阅文献发现，目前还未有学者对三维二十面体准晶刚性线夹杂相关问题进行研究。本研究基于复变函数方法研究了三维二十面体准晶在集中力和无穷远均匀拉伸作用下含界面圆弧刚性线夹杂的平面弹性问题，得到了几种特殊情况下应力分量和位移分量的封闭解，给出了刚性线夹杂尖端奇异应力场因子的解析表达式。数值计算讨论了耦合系数、夹杂半径和相位子场弹性常数对应力奇异因子的影响。

1 基本方程和问题描述

根据准晶线弹性理论，三维二十面体准晶的广义胡克定律[17]可以表示成

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + R_{ijkl}\omega_{kl},\quad H_{ij} = R_{ijkl}\varepsilon_{kl} + K_{ijkl}\omega_{kl} \tag{1}$$

变形几何方程[17]为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \omega_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \tag{2}$$

在不计体力作用时，平衡方程[17]为

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0, \partial_j H_{ij} = 0 \tag{3}$$

其中：σ_{ij}、H_{ij} 分别为声子场和相位子场应力分量；ε_{kl}、ω_{kl} 分别为声子场和相位子场应变分量；u_i、w_i 分别为声子场和相位子场位移分量；C_{ijkl}、R_{ijkl}、K_{ijkl} $(i,j,k,l = 1,2,3)$ 分别为声子场、相位子场和声子场-相位子场耦合弹性常数；$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$，$\lambda$ 和 μ 为 Lamé 常数，δ_{ij} 为 Kronecker 记号。

若所有场变量与 x_3 无关，即

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \tag{4}$$

且当 $(R/\mu)^2 \ll 1$ 时，式(1)~式(3)的求解可转化为求解满足下面条件的函数 $G(x_1, x_2)$[17]。

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 G = 0 \tag{5}$$

其中：$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$；$G(x_1, x_2)$ 为位移势函数。式(5)为三维二十面体准晶弹性问题的最终控制方程，它是一个十二阶的偏微分方程。由算子理论知，式(5)的基本解可以表示为[17]

$$G(x_1, x_2) = \mathrm{Re}[g_1(z) + \bar{z}g_2(z) + \bar{z}^2 g_3(z) + \bar{z}^3 g_4(z) + \bar{z}^4 g_5(z) + \bar{z}^5 g_6(z)] \tag{6}$$

其中：$g_i(z)(i = 1,2,\cdots,6)$ 是 $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ 的任意解析函数；$\bar{z} = x_1 - \mathrm{i}x_2$；$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。利用应力函数可把三维二十面体准晶应力和位移分量分别表示为[17]

$$\begin{cases} u_1 + \mathrm{i}u_2 = -6c_2R\left[\dfrac{2c_3}{(\mu+\lambda)} + c_7\right]\mathrm{i}\Delta(z) - \\ \qquad 2c_2c_7R\mathrm{i}\,\overline{\Omega(z)} \\ w_1 + \mathrm{i}w_2 = \dfrac{R\mathrm{i}}{c_1(\mu K_1 - 2R^2)}\left[c_8\,\overline{\Theta(z)} - 24c_9\Psi(z)\right] \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho + \mathrm{i}\sigma_{\rho\theta} = 12c_2c_3R\mathrm{i}\left[\overline{\Delta'(z)} - \Delta'(z)\right] + \\ \qquad 4c_2c_3R\mathrm{i}\left[12\Psi'(z) - \overline{\Omega'(z)}\right]\dfrac{\bar{z}}{z} \\ H_\rho + \mathrm{i}H_{\rho\theta} = -4c_2\mathrm{i}\left[12c_5\,\overline{\Psi'(z)} + c_1R\Omega'(z)\right]\dfrac{z}{\bar{z}} - \\ \qquad 4c_2\mathrm{i}\left[120c_5\,\overline{f_6'(z)} + c_1R\Theta'(z)\right]\dfrac{\bar{z}}{z} \end{cases} \tag{8}$$

其中：u_i 、w_i 表示声子场、相位子场直角坐标系下位移分量；σ_ρ 、$\sigma_{\rho\theta}$ 、H_ρ 、$H_{\rho\theta}$ 分别为声子场、相位子场极坐标系下应力分量；λ 和 μ 为 Lamé 常数；K_i 表示相位子场弹性常数；R 为声子场-相位子场耦合系数，且

$$c_1 = \frac{R(2K_2 - K_1)(\mu K_1 + \mu K_2 - 3R^2)}{2(\mu K_1 - 2R^2)},$$

$$c_2 = \frac{1}{R}K_2(\mu K_2 - R^2) - R(2K_2 - K_1),$$

$$c_3 = \mu(K_1 - K_2) - R^2 - \frac{(\mu K_2 - R^2)^2}{\mu K_1 - 2R^2},$$

$$c_4 = c_1R + \frac{1}{2}c_3\left(K_1 + \frac{\mu K_1 - 2R^2}{\lambda + \mu}\right),$$

$$c_5 = 2c_4 - c_1R, c_7 = \frac{c_3K_1 + 2c_1R}{\mu K_1 - 2R^2},$$

$$c_6 = (2K_2 - K_1)R^2 - 4c_4\frac{\mu K_2 - R^2}{\mu K_1 - 2R^2},$$

$$c_8 = c_1c_2R\left[\mu(K_1 - K_2) - R^2\right],$$

$$c_9 = c_8 + 2c_2c_4\left[c_3 - \frac{(\mu K_2 - R^2)^2}{\mu K_1 - 2R^2}\right],$$

$$c_{10} = c_1c_2R^2 - c_4(c_2R - c_3K_1),$$

$$\Psi(z) = g_5(z) + 5\bar{z}g_6'(z),$$

$$\Delta(z) = g_4(z) + 4\bar{z}g_5'(z) + 10\bar{z}^2g_6''(z),$$

$$\Omega(z) = g_3(z) + 3\bar{z}g_4'(z) + 6\bar{z}^2g_5''(z) + 10\bar{z}^3g_6'''(z),$$

$$\Theta(z) = g_2(z) + 2\bar{z}g_3'(z) + 3\bar{z}^2g_4''(z) + 4\bar{z}^3g_5'''(z) + 5\bar{z}^4g_6^{(4)}(z)$$

声子场的应力主矢量 $\Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2$ 可表示为

$$\Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2 = 12c_2c_3R\left[\overline{\Delta(z)} - \Delta(z)\right] - 4c_2c_3R\left[12\Psi(z) - \overline{\Omega(z)}\right] \tag{9}$$

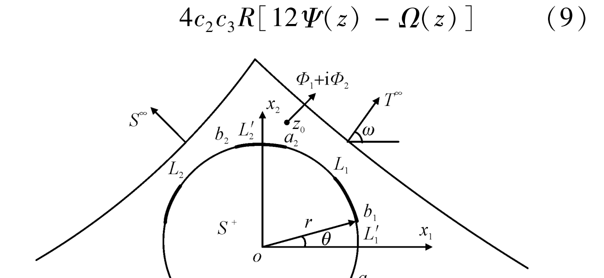


图 1　准晶平面中的圆弧形界面刚性线

Fig. 1　Interfacial circular arc rigid lines in quasicrystals

图 1 为准晶平面中的圆弧形界面刚性线，记无限大基体为 S^-，半径为 r 的圆形准晶夹杂记为 S^+，S^+ 包含在 S^- 内。基体和夹杂分别为弹性常数不同的三维二十面体准晶。在 S^+ 和 S^- 的交界面上，有 $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ 条两两互不相交的圆弧形刚性线夹杂 L_j。记 $L = \bigcup_{k=1}^{n} L_k$，$a_j$ 和 b_j 表示 L_j 的端点，界面剩余完全黏结部分用 L' 表示。在无穷远处，整个系统受均匀拉伸应力 T^∞ 和 S^∞ 的作用。ω 表示 T^∞ 与实轴所成角度，集中力 $\Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2$ 作用在基体上任意点 z_0 处。不失一般性，设无穷远处回转为 0。

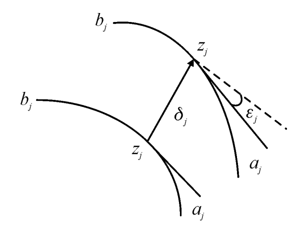


图 2　刚性线的平移和旋转

Fig. 2　Translation and rotation of rigid line

取复平面 $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ 的坐标原点为圆形准晶夹杂的中心，则基体和夹杂相交界面上的点可以记为 $t = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。此时，位移和应力在界面黏结部分和刚性线上的边界条件可以表示为

$$u_{11}^+(t) + \mathrm{i}u_{21}^+(t) = u_{12}^-(t) + \mathrm{i}u_{22}^-(t),$$
$$w_{11}^+(t) + \mathrm{i}w_{21}^+(t) = w_{12}^-(t) + \mathrm{i}w_{22}^-(t) = 0,$$
$$t \in L' + L \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 1}^+(t) + \mathrm{i}\sigma_{\rho\theta 1}^+(t) &= \sigma_{\rho 2}^-(t) + \mathrm{i}\sigma_{\rho\theta 2}^-(t) \\ &= H_{\rho 1}^+(t) + \mathrm{i}H_{\rho\theta 1}^+(t) \\ &= H_{\rho 2}^-(t) + \mathrm{i}H_{\rho\theta 2}^-(t),\ t \in L' \end{aligned} \tag{11}$$

$$u_{11}^+(t) + \mathrm{i}u_{21}^+(t) = u_{12}^-(t) + \mathrm{i}u_{22}^-(t)$$

$$= \begin{cases} \tau_1(t) + \mathrm{i}\varepsilon_1(z - z_1), z_1 \in L_1 \\ \cdots \\ \tau_n(t) + \mathrm{i}\varepsilon_n(z - z_n), z_n \in L_n \end{cases} \tag{12}$$

其中：下标1和2分别表示区域S^+和S^-中的量；上标“+”表示z从S^+趋向界面时函数的正边界值；上标“−”表示函数的负边界值。L_j随给定点z_j的平移记为τ_j，绕z_j点的小角度旋转为ε_j。显见，$\Psi(z) = \Theta(z) = 0$已满足界面边界条件。

式(7)中第一式关于θ求导后，得到

$$[u_{11}'(t) + \mathrm{i}u_{21}'(t)]^+ + [u_{12}'(t) + \mathrm{i}u_{22}'(t)]^- = 2\mathrm{i}t\Lambda(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \tag{13}$$

$$[u_{11}'(t) + \mathrm{i}u_{21}'(t)]^+ - [u_{12}'(t) + \mathrm{i}u_{22}'(t)]^- = 0 \tag{14}$$

其中

$$\Lambda(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = \begin{cases} \mathrm{i}\varepsilon_1, \text{on } L_1 \\ \cdots \\ \mathrm{i}\varepsilon_n, \text{on } L_n \end{cases}$$

为了唯一求得问题的解答，必须考虑刚性线上力的相互平衡条件。若在刚性线上没有作用外载荷时，则刚性线上的合力和合力矩应该为0，从而有

$$\int_{a_j}^{b_j} [\sigma_{\rho 1}(t) + \mathrm{i}\sigma_{\rho\theta 1}(t)]^+ \mathrm{d}t - \int_{a_j}^{b_j} [\sigma_{\rho 2}(t) + \mathrm{i}\sigma_{\rho\theta 2}(t)]^- \mathrm{d}t = 0 \tag{15}$$

$$\mathrm{Re}\int_{a_j}^{b_j} [\sigma_{\rho 1}(t) + \mathrm{i}\sigma_{\rho\theta 1}(t)]^+ \frac{\mathrm{d}t}{t} - \mathrm{Re}\int_{a_j}^{b_j} [\sigma_{\rho 2}(t) + \mathrm{i}\sigma_{\rho\theta 2}(t)]^- \frac{\mathrm{d}t}{t} = 0 \tag{16}$$

其中，$j = 1, 2\cdots, n$。

2 问题求解

设$\Delta_2'(z)$、$\Omega_2'(z)$在基体中可表示为

$$\Delta_2'(z) = \frac{M_2}{z - z_0} + \Gamma + \Delta_{20}'(z), z \in S^- \tag{17}$$

$$\Omega_2'(z) = \frac{N_2}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0 M_2}{(z - z_0)^2} + \Gamma' + \Omega_{20}'(z), z \in S^- \tag{18}$$

其中，$\Delta_{20}'(z)$、$\Omega_{20}'(z)$是S^-中全纯函数，在无穷远处为0，且

$$\Gamma = \frac{1}{4}(T^\infty + S^\infty), \Gamma' = -\frac{1}{2}(T^\infty - S^\infty)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega},$$

$$\frac{1}{M_2} = \frac{24\pi c_2^{(2)} c_3^{(2)} R^{(2)} \mathrm{i}}{\Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2} - \frac{12\pi c_2^{(2)} c_7^{(2)} R^{(2)}}{\Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2} - \frac{24\pi c_2^{(2)} c_3^{(2)} R^{(2)}}{(\mu^{(2)} + \lambda^{(2)})(\Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2)},$$

$$\frac{1}{N_2} = \frac{12\pi c_2^{(2)} c_7^{(2)} R^{(2)} (\mu^{(2)} + \lambda^{(2)})}{[12 c_2^{(2)} c_3^{(2)} R^{(2)} + 6 c_2^{(2)} c_7^{(2)} R^{(2)} (\mu^{(2)} + \lambda^{(2)})](\Phi_1 - \mathrm{i}\Phi_2)} - \frac{24\pi c_2^{(2)} c_3^{(2)} R^{(2)} \mathrm{i}(\mu^{(2)} + \lambda^{(2)})}{[12 c_2^{(2)} c_3^{(2)} R^{(2)} + 6 c_2^{(2)} c_7^{(2)} R^{(2)} (\mu^{(2)} + \lambda^{(2)})](\Phi_1 - \mathrm{i}\Phi_2)} + \frac{24\pi c_2^{(2)} c_3^{(2)} R^{(2)}}{[12 c_2^{(2)} c_3^{(2)} R^{(2)} + 6 c_2^{(2)} c_7^{(2)} R^{(2)} (\mu^{(2)} + \lambda^{(2)})](\Phi_1 - \mathrm{i}\Phi_2)}$$

利用黎曼-施瓦兹对称原理[18]，在S^+中引入一个新的解析函数$E_2'(z)$，且

$$E_2'(z) = -\overline{\Delta_2'(z)} + \frac{r^2}{3z^2}\overline{\Omega_2'(z)}, z \in S^+ \tag{19}$$

即

$$E_2'(z) = \frac{\overline{N}_2}{3z} - \frac{\overline{N}_2}{3(z - z^*)} + \frac{z\overline{M}_2}{\bar{z}_0(z - z^*)} + \frac{z^* z_0 \overline{M}_2}{3\bar{z}_0(z - z^*)^2} + \frac{r^2}{3z^2}\overline{\Gamma} + E_{20}'(z) \tag{20}$$

其中：$E_2'(z)$在S^+内除$z^* = \frac{r^2}{\bar{z}_0}$，$z = 0$两点外全纯；$E_{20}'(z)$是$S^+$内全纯函数。

由于夹杂内没有载荷作用，所以$\Delta_1'(z)$、$\Omega_1'(z)$在S^+内全纯。同理，在S^-内引入全纯函数

$$E_1'(z) = -\overline{\Delta_1'(z)} + \frac{r^2}{3z^2}\overline{\Omega_1'(z)}, z \in S^- \tag{21}$$

此时，夹杂$(j = 1)$和基体$(j = 2)$的应力和位移可表示为

$$\sigma_{\rho j} + \mathrm{i}\sigma_{\rho\theta j} = -12 c_2^{(j)} c_3^{(j)} R^{(j)} \mathrm{i}\Delta_j'(z) - 12 c_2^{(j)} c_3^{(j)} R^{(j)} \mathrm{i}E_j'(z) - 4 c_2^{(j)} c_3^{(j)} R^{(j)} \mathrm{i}\bar{z}\left(\frac{\bar{z}}{r^2} - \frac{1}{z}\right)\overline{\Omega_j'(z)} \tag{22}$$

$$u_{1j}' + \mathrm{i}u_{2j}' = 6 c_2^{(j)} R^{(j)} \left(\frac{2c_3^{(j)}}{\mu^{(j)} + \lambda^{(j)}} + c_7^{(j)}\right) \times z\Delta_j'(z) - 6 c_2^{(j)} c_7^{(j)} R^{(j)} \mathrm{i}zE_j'(z) - 2 c_2^{(j)} c_7^{(j)} R^{(j)} \mathrm{i}z\bar{z}\left(\frac{\bar{z}}{r^2} - \frac{1}{z}\right)\overline{\Omega_j'(z)} \tag{23}$$

由界面位移连续条件可得

$$\left[c_2^{(1)}R^{(1)}\left(\frac{2c_3^{(1)}}{\mu^{(1)}+\lambda^{(1)}}+c_7^{(1)}\right)\Delta_1'(t)+c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}E_2'(t)\right]^+=\left[c_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\Delta_2'(t)+c_2^{(1)}c_7^{(1)}R^{(1)}E_1'(t)\right]^-,t\in L+L' \tag{24}$$

即

$$\left[c_2^{(1)}R^{(1)}\left(\frac{2c_3^{(1)}}{\mu^{(1)}+\lambda^{(1)}}+c_7^{(1)}\right)\Delta_1'(t)+c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}E_2'(t)\right]$$

与$\left[c_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\Delta_2'(t)+c_2^{(1)}c_7^{(1)}R^{(1)}E_1'(t)\right]$

越过 L' 相互解析延拓。

根据广义 Liouville 定理[18]，可得

$$h(z)=\begin{cases}c_2^{(1)}R^{(1)}\left(\frac{2c_3^{(1)}}{\mu^{(1)}+\lambda^{(1)}}+c_7^{(1)}\right)\Delta_1'(z)+c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}E_2'(z),z\in S^+\\ c_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\Delta_2'(z)+c_2^{(1)}c_7^{(1)}R^{(1)}E_1'(z),z\in S^-\end{cases} \tag{25}$$

其中

$$\begin{aligned}h(z)=&c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}\left[\frac{\overline{N}_2}{3z}-\frac{\overline{N}_2}{3(z-z^*)}\right]+c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}\left[\frac{z\overline{M}_2}{\bar{z}_0(z-z^*)}+\frac{z^*z_0\overline{M}_2}{3\bar{z}_0(z-z^*)^2}\right]+\\&c_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\frac{M_2}{z-z_0}+c_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\Gamma+\\&c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}\frac{r^2}{3z^2}\overline{\Gamma}'+D_0\end{aligned} \tag{26}$$

由式(21)和式(25)，可知

$$D_0=-c_2^{(1)}c_7^{(1)}R^{(1)}\overline{\Delta_1'(0)} \tag{27}$$

同理，应力连续条件可表示为

$$\left[-c_2^{(1)}c_3^{(1)}R^{(1)}\Delta_1'(t)+c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}E_2'(t)\right]^+=\left[-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\Delta_2'(t)+c_2^{(1)}c_3^{(1)}R^{(1)}E_1'(t)\right]^-,t\in L' \tag{28}$$

这表明 $\left[-c_2^{(1)}c_3^{(1)}R^{(1)}\Delta_1'(t)+c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}E_2'(t)\right]$ 与 $\left[-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\Delta_2'(t)+c_2^{(1)}c_3^{(1)}R^{(1)}E_1'(t)\right]$ 越过 L' 相互解析延拓。

设

$$W(z)=\begin{cases}c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}E_2'(z)-c_2^{(1)}c_3^{(1)}R^{(1)}\Delta_1'(z),z\in S^+\\ c_2^{(1)}c_3^{(1)}R^{(1)}E_1'(z)-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\Delta_2'(z),z\in S^-\end{cases} \tag{29}$$

这里 $W(z)$ 的奇性主部可表示为

$$\begin{aligned}W(z)=&c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\left[\frac{\overline{N}_2}{3z}-\frac{\overline{N}_2}{3(z-z^*)}\right]+c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\left[\frac{z\overline{M}_2}{\bar{z}_0(z-z^*)}+\frac{r^2}{3z^2}\overline{\Gamma}'\right]+\\&c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\left[\frac{z^*z_0\overline{M}_2}{3\bar{z}_0(z-z^*)^2}-\frac{M_2}{z-z_0}\right]-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\Gamma+\frac{c_3^{(1)}}{c_7^{(1)}}D_0+W_0(z)\end{aligned} \tag{30}$$

其中，$W_0(z)$ 在沿 L 割开的全平面全纯，并且在无穷远处为 0。由式(25)和式(29)，即可得到复势函数 $\Delta_1'(z)$、$E_1'(z)$、$\Delta_2'(z)$、$E_2'(z)$ 的表达式。

由式(13)和式(23)有

$$W^+(t)-gW^-(t)=B[\mathrm{i}\Lambda+Ah(t)],t\in L \tag{31}$$

这里

$$g=-\frac{[2c_3^{(2)}c_7^{(1)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})+c_3^{(2)}c_3^{(1)}+c_3^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})][2c_3^{(2)}c_7^{(1)}+c_7^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})]}{[c_3^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})+2c_3^{(2)}c_3^{(1)}+c_3^{(2)}c_7^{(1)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})][2c_3^{(1)}c_7^{(2)}+c_7^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})]},$$

$$A=-\frac{6c_3^{(2)}c_3^{(1)}+3c_3^{(2)}c_7^{(1)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})-3c_3^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})}{2c_3^{(2)}c_3^{(1)}+c_3^{(2)}c_7^{(1)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})+c_3^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})}-\frac{6c_3^{(2)}c_3^{(1)}+3c_3^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})-3c_3^{(2)}c_7^{(1)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})}{2c_3^{(2)}c_3^{(1)}+c_3^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})+c_3^{(2)}c_7^{(1)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})},$$

$$B=-\frac{2c_3^{(2)}c_3^{(1)}+c_3^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})+c_3^{(2)}c_7^{(1)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})}{12c_3^{(1)}c_7^{(2)}+6c_7^{(1)}c_7^{(2)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})}$$

由式(29)和式(31)有

$$W_0^+(t)-gW_0^-(t)=B[\mathrm{i}\Lambda+Ah(t)]-(1-g)\left\{c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\left[\frac{z\overline{M}_2}{\bar{z}_0(z-z^*)}+\frac{\overline{N}_2}{3z}-\frac{\overline{N}_2}{3(z-z^*)}+\frac{z^*z_0\overline{M}_2}{3\bar{z}_0(z-z^*)^2}+\frac{r^2}{3z^2}\overline{\Gamma'}-\frac{M_2}{z-z_0}-\Gamma\right]+\frac{c_3^{(1)}}{c_7^{(1)}}D_0\right\} \tag{32}$$

参阅 MUSKHELISHVILI[19]的著作,边值问题式(32)的一般解答为

$$W_0(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{X_0^+(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t-z}+P_n(z)X_0(z) \tag{33}$$

其中

$$f(t)=B[\mathrm{i}\Lambda+Ah(t)]-(1-g)\times\left\{c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\left[\frac{z\overline{M}_2}{\bar{z}_0(z-z^*)}-\frac{\overline{N}_2}{3(z-z^*)}+\frac{\overline{N}_2}{3z}+\frac{z^*z_0\overline{M}_2}{3\bar{z}_0(z-z^*)^2}+\frac{r^2}{3z^2}\overline{\Gamma'}-\frac{M_2}{z-z_0}-\Gamma'\right]+\frac{c_3^{(1)}}{c_7^{(1)}}D_0\right\},$$

$$X_0(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{\gamma-1}(z-b_j)^{-\gamma},$$

$$\gamma=\frac{\ln g}{2\pi\mathrm{i}}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta,\beta=\frac{\ln|g|}{2\pi}$$

且 $X_0(z)$ 是沿 L 割开平面上的单值分支,在 L 上满足关系 $X_0^+(t)=gX_0^-(t)$,成立

$$\lim_{z\to\infty}[zX_0(z)]=1 \tag{34}$$

$P_n(z)$ 为不超过 n 次幂的多项式,且

$$P_n(z)=C_1z^{n-1}+C_2z^{n-2}+\cdots+C_n \tag{35}$$

这里系数 $D_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 和实常数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 将由式(15)、式(16)和式(27)确定。

把式(22)代入式(15)中得到

$$\int_{a_j}^{b_j}[c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}E_2'(t)-c_2^{(1)}c_3^{(1)}R^{(1)}\Delta_1'(t)]^+\mathrm{d}t-\int_{a_j}^{b_j}[c_2^{(1)}c_3^{(1)}R^{(1)}E_1'(t)-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\Delta_2'(t)]^-\mathrm{d}t=0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{36}$$

上式可以表示为封闭围道的积分

$$\int_{\Lambda_j}W(z)\mathrm{d}z=0,\ j=1,2,\cdots,n \tag{37}$$

其中,Λ_j 为沿着刚性线 L_j 的顺时针方向围道,但不包括点 $z=0,z_0,z^*$。

同理,将式(21)代入式(16),可得到

$$\mathrm{Re}\int_{\Lambda_j}W(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}=0,\ j=1,2,\cdots,n \tag{38}$$

由式(27)、式(37)和式(38)可确定 $2n+1$ 个常数。

特别的,若刚性线上没有外荷载作用,$C_1=0$。反之,可用 $\int_{\Lambda_j}W(z)\mathrm{d}z=-\Phi_{2j}+\mathrm{i}\Phi_{1j},(j=1,2,\cdots,n)$ 来代替式(38)。

3 特 例

图3给出的模型中仅含一条刚性线,同时假设刚性线关于 x 轴对称。在 $|z|=r$ 上,刚性线的2个端点分别记为 $a=re^{-\mathrm{i}\theta},b=re^{\mathrm{i}\theta}$。

计算式(33)的Cauchy积分后可得

$$W(z)=\frac{1}{1-g}[\mathrm{i}B\Lambda+ABh(z)]-\frac{X_0(z)}{1-g}[G_0(z)+G_\infty(z)+G_{z0}(z)+G_{z*}(z)-(1-g)P_n(z)] \tag{39}$$

这里

$$X_0(z)=(z-a)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta}(z-b)^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta}$$

其中,$G_0(z)$、$G_\infty(z)$、$G_{z_0}(z)$ 和 $G_{z*}(z)$ 分别代表函数 $\frac{f(x)}{X_0(z)}$ 在 $z=0,z=\infty,z=z_0$ 及 $z=z^*$ 的奇性主部。

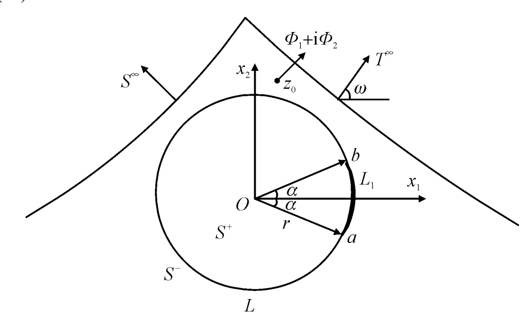


图3 含一条关于 x 轴对称的刚性线夹杂

Fig. 3 Inclusion with a rigid line symmetric about the x axis

3.1 无穷远受均匀拉伸荷载 T^∞ 和 S^∞

若无穷远受均匀拉伸荷载 T^∞ 和 S^∞,此时,$G_{z_0}(z)=0,G_{z*}(z)=0$,则

$$h(z)=c_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\Gamma+c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}\frac{r^2}{3z^2}\overline{\Gamma'}+D_0 \tag{40}$$

$$W(z)=\frac{1}{1-g}[-\varepsilon_1B+ABh(z)]-\frac{X_0(z)}{1-g}[G_0(z)+G_\infty(z)] \tag{41}$$

在 $z=0$ 和 $|z|=\infty$ 邻域,把 $\dfrac{1}{X_0(z)}$ 展开为 Laurent 级数,有

$$G_0(z)=\left[(1-g)\frac{c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{3}-\frac{ABc_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{3}\right]\overline{\Gamma'}\times\left[\frac{r^3}{z^2}-\frac{r^2}{z}(\cos\alpha-2\beta\sin\alpha)\right]\mathrm{e}^{2\beta(\alpha+\pi)},$$

$$G_\infty(z)=ABc_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\Gamma+\mathrm{i}B\Lambda+ABD_0-(1-g)\frac{c_3^{(1)}D_0}{c_7^{(1)}}+(1-g)c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\Gamma\times[z-r(\cos\alpha+2\beta\sin\alpha)]$$

其中

$$D_0=\left\{c_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\left(1-\frac{c_7^{(2)}AB}{c_3^{(2)}(1-g)}\right)\Gamma-\frac{c_7^{(2)}\mathrm{e}^{-2\alpha\beta}}{2c_3^{(2)}(1-g)}\left[\frac{1}{4}+\beta^2+\frac{3\cos(2\alpha)}{4}-\beta^2\cos(2\alpha)-2\beta\sin(2\alpha)-(\cos\alpha-2\beta\sin\alpha)^2\right]\left[\frac{(1-g)c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{3}-\frac{ABc_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{3}\right]\times(\Gamma'+\overline{\Gamma'})+\frac{c_7^{(2)}\Gamma\mathrm{e}^{-2\alpha\beta}}{(1-g)c_3^{(2)}}(\cos\alpha+2\beta\sin\alpha)\times\left[ABc_2^{(2)}R^{(2)}\times\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)-(1-g)c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\right]\right\}\Big/\left\{-1-\frac{ABc_7^{(2)}}{(1-g)c_3^{(2)}}\times\frac{c_7^{(2)}\Gamma\mathrm{e}^{-2\alpha\beta}}{(1-g)c_3^{(2)}}(\cos\alpha+2\beta\sin\alpha)\times\left[(1-g)c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}+ABc_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\right]\right\}+\frac{c_3^{(1)}c_7^{(2)}}{c_7^{(1)}c_3^{(2)}}-\frac{2c_2^{(1)}c_3^{(1)}c_3^{(2)}R^{(1)}+c_2^{(1)}c_7^{(1)}c_3^{(2)}R^{(1)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})}{c_2^{(1)}c_7^{(1)}c_3^{(2)}R^{(1)}(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})},$$

$$\varepsilon_1=\frac{-\mathrm{e}^{2\beta\pi}}{-2B(1-\mathrm{e}^{-2\alpha\pi}\cos\alpha-2\beta\mathrm{e}^{-2\alpha\beta}\sin\alpha)}\left[\frac{1}{4}+\beta^2+\frac{3\cos(2\alpha)}{4}-\beta^2\cos(2\alpha)-2\beta\sin(2\alpha)-(\cos\alpha-2\beta\sin\alpha)^2\right](\overline{\Gamma'}-\Gamma')\left[\frac{(1-g)c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{3}-\frac{ABc_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{3}\right]$$

3.2　S^- 任意点 z_0 作用集中力 $\Phi_1+\mathrm{i}\Phi_2$

若在基体内的任意点 z_0 作用集中力 $\Phi_1+\mathrm{i}\Phi_2$,则有

$$h(z)=c_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\frac{M_2}{z-z_0}+c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}\left[\frac{\overline{N}_2}{3z}-\frac{\overline{N}_2}{3(z-z^*)}+\frac{z\overline{M}_2}{(z-z^*)\bar{z}_0}+\frac{z^*z_0\overline{M}_2}{3(z-z^*)^2\bar{z}_0}\right]+D_0 \tag{42}$$

$$W(z)=\frac{1}{1-g}[-\varepsilon_1B+ABh(z)]-\frac{X_0(z)}{1-g}\times[G_0(z)+G_\infty(z)+G_{z_0}(z)+G_{z*}(z)-(1-g)C_1] \tag{43}$$

这里

$$G_0(z)=\frac{1}{X_0(0)}\frac{\overline{N}_2}{z}\left[\frac{ABc_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{3}-\frac{(1-g)c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{3}\right],$$

$$G_\infty(z)=[z-r(\cos\alpha+2\beta\sin\alpha)]\left[ABD_0-\varepsilon_1B-(1-g)\frac{c_3^{(1)}D_0}{c_7^{(1)}}\right]+\left[ABc_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)+(1-g)c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\right]M_2,$$

$$G_{z0}(z)=\frac{M_2}{X_0(z_0)}\frac{1}{z-z_0}\left[ABc_2^{(2)}R^{(2)}\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)+(1-g)c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\right],$$

$$G_{z*}(z)=\frac{1}{X_0(z^*)}[ABc_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}-(1-g)\times c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}]\times\left\{\frac{3z\overline{M}_2-\bar{z}_0\overline{N}_2}{3(z-z^*)\bar{z}_0}+\frac{z^*z_0\overline{M}_2}{3(z-z^*)^2\bar{z}_0}\left[\frac{X_0'(z^*)(z-z^*)}{X_0(z^*)}-1\right]\right\}$$

4　刚性线尖端应力场奇异因子

刚性线尖端局部应力场对断裂准则的建立和评估十分重要。刚性线尖端应力奇异因子的定义如下[18]。

$$S_1-\mathrm{i}S_2=-\sqrt{2\pi}\left(12c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\mathrm{i}+6c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}+\frac{12c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}\right)\times\lim_{z\to t}(z-t)^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta}\Delta_3^{(2)}(z) \tag{44}$$

其中:$t=a$ 时表示端点 a 处的刚性线尖端应力奇异因子;$t=b$ 时表示端点 b 处的刚性线尖端应力奇异因子。

为了计算刚性线尖端的应力场奇异因子,还需把坐标轴进行旋转,使得刚性线尖端切线平行于 x 轴。坐标变换函数为

在端点 b,有

$$z=\varpi(Z)=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha}\left[Z-\mathrm{i}r-\frac{1}{2}r\sin(2\alpha)\right] \tag{45}$$

在端点 a,有

$$z=\varpi(Z)=-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha}\left[Z-\mathrm{i}r-\frac{1}{2}r\sin(2\alpha)\right] \tag{46}$$

从而可得刚性线端点 b 处的应力奇异因子为

$$\begin{aligned}S_1-\mathrm{i}S_2 = &-\sqrt{2\pi r}e^{-\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}-\alpha\beta}\left[\frac{-12c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{(1-g)(2r\sin\alpha)^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta}}+\frac{6c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}\mathrm{i}}{(1-g)(2r\sin\alpha)^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta}}+\right.\\ &\left.\frac{12c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\mathrm{i}}{(1-g)(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})(2r\sin\alpha)^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta}}\right]\times\left\{\left[\frac{2c_2^{(2)}c_3^{(1)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{-(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})c_7^{(1)}}-\frac{c_2^{(2)}c_3^{(1)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{c_7^{(1)}}-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\right]\times\right.\\ &\left[-\frac{ABc_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{3}\overline{\Gamma'}+(1-g)\frac{c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{3}\overline{\Gamma'}\right]\left[e^{-2\mathrm{i}\alpha}-e^{-\mathrm{i}\alpha}(\cos\alpha-2\beta\sin\alpha)\right]\times e^{2\beta(\alpha+\pi)}+\\ &\left[\left(\mathrm{i}B\Lambda+ABc_2^{(2)}R^{(2)}\times\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\Gamma+ABD_0\right)-(1-g)\left(-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\Gamma+\frac{c_3^{(1)}D_0}{c_7^{(1)}}\right)\right]\times\\ &\left.\left[e^{-\mathrm{i}\alpha}-(\cos\alpha+2\beta\sin\alpha)\right]\left[\frac{2c_2^{(2)}c_3^{(1)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{-(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})c_7^{(1)}}-\frac{c_2^{(2)}c_3^{(1)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{c_7^{(1)}}+c_2^{(2)}c_3^{(2)}c_7^{(1)}R^{(2)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})\right]\right\}\end{aligned} \tag{47}$$

端点 a 处的应力奇异因子为

$$\begin{aligned}S_1-\mathrm{i}S_2 = &\frac{\sqrt{2\pi r}\mathrm{i}e^{\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}-\alpha\beta}}{(1-g)(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})(2r\sin\alpha)^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta}}\left[12c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\mathrm{i}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})+6c_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})+\right.\\ &\left.12c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\right]\times\left\{\frac{2c_2^{(2)}c_3^{(1)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{-(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})c_7^{(1)}}-\frac{c_2^{(2)}c_3^{(1)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{c_7^{(1)}}-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\times\left[(1-g)\frac{c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{3}\overline{\Gamma'}-\right.\right.\\ &\left.\frac{ABc_2^{(2)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{3}\overline{\Gamma'}\right]\left[e^{2\mathrm{i}\alpha}-e^{\mathrm{i}\alpha}(\cos\alpha-2\beta\sin\alpha)\right]e^{2\beta(\alpha+\pi)}+\left[\left(\mathrm{i}B\Lambda+ABc_2^{(2)}R^{(2)}\times\right.\right.\\ &\left.\left.\left(\frac{2c_3^{(2)}}{\mu^{(2)}+\lambda^{(2)}}+c_7^{(2)}\right)\Gamma+ABD_0\right)-(1-g)\left(\frac{c_3^{(1)}D_0}{c_7^{(1)}}-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\Gamma\right)\right]\left[e^{-\mathrm{i}\alpha}-(\cos\alpha+2\beta\sin\alpha)\right]\times\\ &\left.\left[\frac{2c_2^{(2)}c_3^{(1)}c_3^{(2)}R^{(2)}}{-(\mu^{(2)}+\lambda^{(2)})c_7^{(1)}}-\frac{c_2^{(2)}c_3^{(1)}c_7^{(2)}R^{(2)}}{c_7^{(1)}}-c_2^{(2)}c_3^{(2)}R^{(2)}\right]\right\}\end{aligned} \tag{48}$$

当 $c_2^{(1)}=c_2^{(2)}$、$c_3^{(1)}=c_3^{(2)}$、$c_7^{(1)}=c_7^{(1)}$、$\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$、$\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}$、$R^{(1)}=R^{(2)}=0$ 时,本研究所得结果与文献[20]已有结论一致。

5 数值算例

数值算例考虑在无穷远加载下基体与夹杂界面只含一条弧形刚性线尖端的应力奇异因子的变化情况。弹性常数如表 1 所示,其中基体材料为材料Ⅰ,夹杂材料为材料Ⅱ。定义无量纲应力奇异因子为 $S_{10}=S_1/T^{\infty}$, $S_{20}=S_2/T^{\infty}$。

表 1 三维二十面体准晶材料常数[21]

Tab. 1 Three-dimensional icosahedral quasicrystal material constant[21]

属性	λ/GPa	μ/GPa	K_1/GPa	K_2/MPa	R
材料Ⅰ	74.9	72.9	72	−37	0.44μ
材料Ⅱ	74.2	70.4	43	−22	0.44μ

图 4 ~ 图 5 绘制了 R/μ 取不同值时,刚性线角度 α 对刚性线尖端 b 的应力奇异因子影响。从图中可以观察到,在无穷远加载作用下,无量纲应力奇异因子 S_{10} 随刚性线角度 α 的增大而增加,在 $\alpha=80°$ 附近达到最大值,之后随着 α 的增大而减小,在 $\alpha=144°$ 附近达到最小值,随后再增加。而无量纲应力

奇异因子 S_{20} 先随 α 的增大而减小,在 $\alpha=85°$ 附近达到最小值,然后随 α 的增大而增大,在 $\alpha=170°$ 附近时达到最大值后再减小。从破坏机理来看,无穷远载荷作用下刚性线角度 $\alpha=50°$ 时最容易发生破坏。

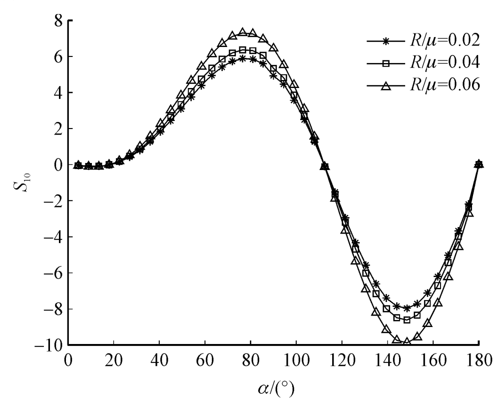


图 4　R/μ 不同时, S_{10} 随 α 的变化

Fig. 4　The variation of S_{10} with α for different R/μ

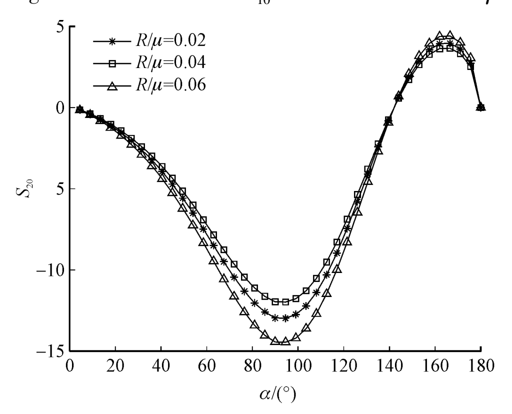


图 5　R/μ 不同时, S_{20} 随 α 的变化

Fig. 5　The variation of S_{20} with α for different R/μ

图 6 ~ 图 7 给出了夹杂半径 r 不同时无量纲应力奇异因子随刚性线角度 α 的变化情形。

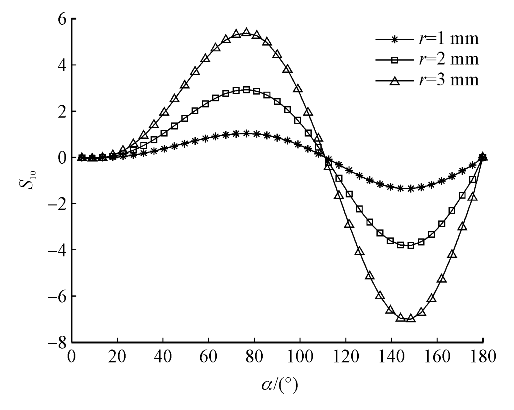


图 6　取不同 r 时, S_{10} 随 α 的变化

Fig. 6　The variation of S_{10} with α for different r

从图中可以观察到夹杂半径 r 的大小对裂纹尖端应力奇异因子有很明显的影响, r 越大,应力场奇异因子的变化趋势越明显且绝对值越大。S_{10} 开始随刚性线角度 α 增大而增大,在 $\alpha=80°$ 附近达到最大值,然后随 α 进一步增大而减小,之后再增大。而 S_{20} 先随刚性线角度 α 增大而减小,当刚性线角度 α 在 90°附近时应力奇异因子 S_{20} 最小,之后 S_{20} 随着 α 增大而增大,在 160°附近 S_{20} 达到最大正值。

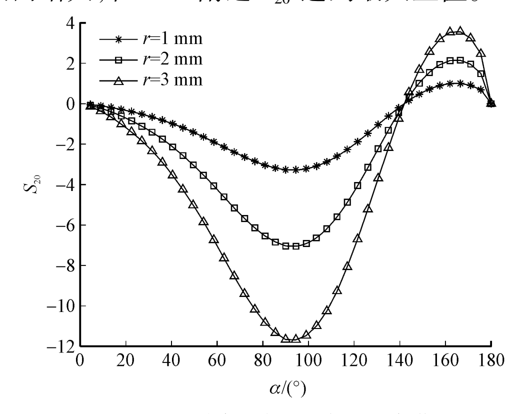


图 7　取不同 r 时, S_{20} 随 α 的变化

Fig. 7　The variation of S_{20} with α for different r

图 8 ~ 图 9 描述了相位子场参数 $K_1^{(1)}$ 取不同值时无量纲应力奇异因子随刚性线角度 α 的变化情形。

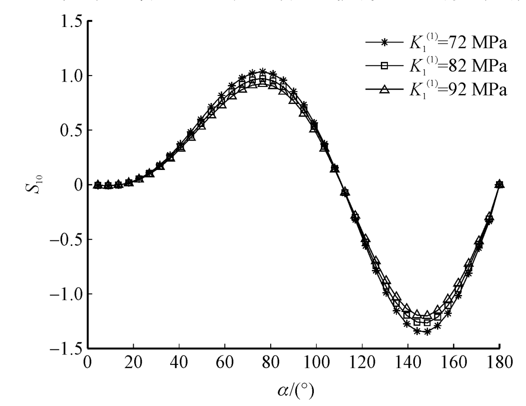


图 8　取不同 $K_1^{(1)}$ 时, S_{10} 随 α 的变化

Fig. 8　The variation of S_{10} with α for different $K_1^{(1)}$

由图可知,相位子场参数 $K_1^{(1)}$ 越小,应力奇异因子的变化趋势越明显,绝对值越大。如图 8 所示, S_{10} 先随着 α 的增大而增大,在 70°附近达到最大值,这表明此处刚性线对界面的破坏达到最大。之后,随着 α 的增大逐渐减小且在 $\alpha=145°$ 附近达到最小值,这表明当 $70°<\alpha<150°$ 时,刚性线对 S_{10} 的相互屏蔽作用逐渐减小。S_{20} 随着刚性线角度 α 的增大而减小,当刚性线角度 α 接近 100°, S_{20} 达到最小值,然后随着 α 的增加再增加,在 α 接近 170°时取到最大正值。图 9 表明当 $0°<\alpha<100°$ 时,刚性线对 S_{20} 的相互屏蔽作用逐渐减小,此时界面破坏主要由 S_{10} 造成。当 $100°<\alpha<170°$ 时,刚性线对 S_{20} 的相互放大作用单调增加,此时的界面破坏主要由 S_{20} 造成。从

图4~图9中可以看出,平面载荷作用下圆弧型刚性线尖端的应力场具有奇异性,夹杂半径对应力奇异因子的影响显著大于耦合系数以及相位子场参数对应力奇异因子的影响。

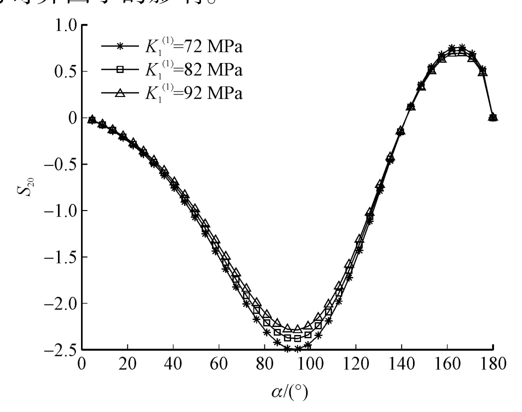


图9 取不同 $K_1^{(1)}$ 时,S_{20} 随 α 的变化

Fig. 9 The variation of S_{20} with α for different $K_1^{(1)}$

6 结束语

基于复变函数方法,本研究把集中力作用下含界面刚性线的圆形夹杂三维二十面体准晶平面弹性问题转化为解析函数边值问题进行求解,导出了刚性圆弧夹杂在集中力作用下刚性线尖端应力场奇异因子和应力场的解析表达式。数值分析给出了耦合系数、夹杂半径及相位子场参数对刚性线尖端应力奇异因子的影响。本研究所得的结论可为准晶复合材料的优化设计和制备提供一定的理论依据。

参考文献:

[1] BIGGS B D, LI Y, POON S J. Electronic properties of icosahedral, approximant, and amorphous phases of an Al-Cu-Fe alloy[J]. Physical review b, 1991, 43(10): 8747-8750.

[2] PIERCE F S, GUO Q, POON S J. Enhanced insulatorlike electron transport behavior of thermally tuned quasicrystalline states of Al-Pd-Re alloys[J]. Physical review letters, 1994, 73(16): 2220-2223.

[3] YANG W G, DING D H, WANG R H, et al. Thermodynamics of equilibrium properties of quasicrystals[J]. Zeitschrift für physik b condensed matter, 1997, 100(3): 447-454.

[4] LOBODA V, KOMAROV O, BILYI D, et al. An analytical approach to the analysis of an electrically permeable interface crack in a 1D piezoelectric quasicrystal[J]. Acta mechanica, 2020, 231(8): 3419-3433.

[5] HU K Q, MEGUID S A, ZHONG Z, et al. Partially debonded circular inclusion in one-dimensional quasicrystal material with piezoelectric effect[J]. International journal of mechanics and materials in design, 2020, 16(4): 749-766.

[6] ZHOU Y B, LIU G T, LI L H. Effect of T-stress on the fracture in an infinite one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal with a Griffith crack[J]. European journal of mechanics-a/solids, 2021, 86: 104184.

[7] 孟祥敏,佟百运,吴玉琨. $Al_{65}Cu_{20}Co_{15}$ 准晶体的力学性能[J]. 金属学报, 1994, 30(2): 61-64.
MENG Xiangmin, TONG Baiyun, WU Yukun. Mechanical properties of $Al_{65}Cu_{20}Co_{15}$ quasicrystal[J]. Acta metallurgica Sinica, 1994, 30(2): 61-64(in Chinese).

[8] WANG W S, YUAN H T. Closed-form solutions to the crack and/or rigid line inclusion in 1D orthorhombic quasicrystals[J]. Mathematica applicata, 2019, 32(3): 715-728.

[9] LOU F, CAO T, QIN T Y, et al. Plane analysis for an inclusion in 1D hexagonal quasicrystal using the hypersingular integral equation method[J]. Acta mechanica solida Sinica, 2019, 32(2): 249-260.

[10] GUO J H, ZHANG Z Y, XING Y M. Antiplane analysis for an elliptical inclusion in 1D hexagonal piezoelectric quasicrystal composites[J]. Philosophical magazine, 2016, 96(4): 349-369.

[11] ZHANG Z G, DING S H, LI X. A spheroidal inclusion within a 1D hexagonal piezoelectric quasicrystal[J]. Archive of applied mechanics, 2020, 90(5): 1039-1058.

[12] WANG X. Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a decagonal quasicrystalline plane or half-plane[J]. International journal of engineering science, 2004, 42(17/18): 1911-1930.

[13] 马园园,赵雪芬,丁生虎. 十二次二维准晶圆形弧段裂纹的热应力分析[J]. 振动与冲击, 2021, 40(18): 237-249.
MA Yuanyuan, ZHAO Xuefen, DING Shenghu. Thermal stress analysis of dedecagonal two-dimensional quasicrystals circular arc cracks[J]. Journal of vibration and shock, 2021, 40(18): 237-249(in Chinese).

[14] WANG X, SCHIAVONE P. Decagonal quasicrystalline elliptical inclusions under thermomechanical loading[J]. Acta mechanica solida Sinica, 2014, 27(5): 518-530.

[15] 张亮亮. 三维立方准晶的若干平面弹性问题[D]. 北京:中国农业大学, 2012.

[16] WANG J B, MANCINI L, WANG R H, et al. Phonon- and phason-type spherical inclusions in icosahedral quasicrystals[J]. Journal of physics: condensed matter, 2003, 15(24): L363-L370.

[17] LI L H. Complex potential theory for the plane elasticity problem of decagonal quasicrystals and its application[J]. Applied mathematics and computation, 2013, 219(19): 10105-10111.

[18] 刘又文. 应用固体力学[M]. 北京:中国科学文化出版社, 2003.

[19] MUSKHELISHVILI N I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity[M]. [S. l.]: Springer Netherlands, 2009.

[20] SHEN M H, CHAO C K. Explicit solutions for the elastic and thermoelastic fields with a rigid circular-arc inclusion[J]. International journal of fracture, 1994, 65(1): 1-18.

[21] 范天佑. 固体与软物质准晶数学弹性与相关理论及应用[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2014.

(编辑 李坤璐)